

## Tanner 图中基于矩阵运算的短环分布高效计算方法

朱庆<sup>1</sup>, 吴乐南<sup>2</sup>, 杨永标<sup>1</sup>, 李捷<sup>1</sup>, 徐石明<sup>1</sup>

(1. 国电南瑞科技股份有限公司, 江苏 南京 211106; 2. 东南大学信息科学与工程学院, 江苏 南京 210096)

**摘 要:** Tanner 图中的环分布影响着低密度校验码 (LDPC, low-density parity-check code) 译码算法的误码率性能, 为快速计算出 Tanner 图中短环的数目, 提出一种逐边递推基于矩阵运算的算法。首先定义 5 种基本图结构, 算法在实施过程中可实现结构间的递推。与之前的研究工作相比, 该算法对于同一环长提供多种方法进行计算, 得到相同的计算结果, 进一步证实算法的正确性。新算法不仅能计算出总的环数, 还能给出每一条边参与的环数。该算法将时间复杂度从正比于码长  $N$  的 3 次方降为正比于码长的平方与变量节点平均度数  $D$  的乘积 ( $D \ll N$ )。对于大多数的 LDPC 码, 计算环长为  $g$ 、 $g+2$ 、 $g+4$  的环数需要的时间仅为数秒。

**关键词:** Tanner 图; 低密度校验码; 短环; 最短环长

**中图分类号:** TN911.2

**文献标识码:** A

## Efficient algorithm for calculating short cycles in Tanner graph based on matrix computation

ZHU Qing<sup>1</sup>, WU Le-nan<sup>2</sup>, YANG Yong-biao<sup>1</sup>, LI Jie<sup>1</sup>, XU Shi-ming<sup>1</sup>

(1. NARI Technology Development Co., Ltd., Nanjing 211106, China;

2. School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** Loop distribution of Tanner graph affects the BER performance of low-density parity-check codes (LDPC) decoding. To count short cycles in the Tanner graph efficiently, a side by side recursion algorithm based on matrix computation was proposed. Firstly, 5 basic graph structures were defined to realize recursive calculate in the implementation process. Compared with previous works, the algorithm provided many methods for counting the same length of cycles. The same result confirmed the correctness of the algorithm. The new algorithm could not only calculate the total number of cycles, but also gave the number each edge participating in fixed-length cycles. Its complexity was proportional to the product of  $D$  and square of  $N$ , where  $D$  was the average degree of variable nodes, and  $N$  denoted the code length. For LDPC codes,  $D$  was far less than  $N$ . For most of the LDPC codes, the calculation for numbers of cycle-length  $g$ 、 $g+2$ 、 $g+4$  was only several seconds.

**Key words:** Tanner graph, low-density parity-check codes (LDPC), short cycle, girth

### 1 引言

随着数据通信对大数据、高速率的要求越来越高, LDPC 码<sup>[1-5]</sup>引起了研究者的关注。在 5G 标准之争中, LDPC 码战胜了 Turbo 码及 Polar 码, 成为中长码的编码方案。LDPC 码的优势在于可以采用线性复杂度的置信传播 (BP, belief propagation) 算法进行迭代译码, 并且译码性能逼近香农限。但是,

在采用 BP 算法译码时, 由校验矩阵生成的 Tanner 图中会出现短环, 使消息在传递过程中不独立, 从而影响 BP 译码的性能<sup>[6]</sup>。在一个 Tanner 图中, 最短环的长度 (girth), 记为  $g$ 。一方面,  $g$  的大小影响着 BP 译码的性能,  $g$  越小, BP 译码的性能越差; 另一方面, 短环 (环长为  $g$ 、 $g+2$ 、 $g+4$  的环) 的数目也影响 BP 译码的性能, 在码的基本参数及  $g$  相同时, 短环越多, BP 译码性能越差。因此, 计算

收稿日期: 2016-02-22; 修回日期: 2017-03-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61233007)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.61233007)

出 Tanner 图中所有短环的数量成为信道编码领域一个重要的研究方向<sup>[7-14]</sup>，为改善 LDPC 码的构造及译码性能提供了基础工具。

目前，计算短环的方法可以分为 3 类：1) 计算所有普通图中短环数，但复杂度较高；2) 计算 Tanner 图中环长较短的环的数目，由于利用了 Tanner 图的结构特性，使计算得到简化；3) 只针对具有准循环结构<sup>[1]</sup>的 Tanner 图，利用准循环的特性进行特殊计算，在可计算的最大环长方面有一定优势。

在第 1 类方法中，文献[15]提出了一种在普通图中找出所有短环的方法，时间复杂度为  $O(N|E|(C+1))$ ，其中， $N$  为节点的数目， $|E|$  为所有边的数目， $C$  为环的数目，一般地， $C$  与  $N$  呈指数增长关系。文献[16]提出了一种时间复杂度为  $O(2^N \text{poly}(N))$  的算法，其中， $\text{poly}(N)$  为  $N$  的多项式，可以算出给定环长的环数。文献[17-19]利用 Zeons 代数的方法构建邻接矩阵，对于一个长度为  $k$  的环，通过计算邻接矩阵的  $k$  次幂来计算环数，但其空间复杂度达到了  $O(2^N N^2)$ 。

在第 2 类方法中，文献[20]提出了一个计算环长为  $2a(1 < a < 6)$  的方法，时间复杂度为  $O(N^{a+1})$ 。文献[21]提出了一种可计算环长为  $g, g+2, g+4$  的算法，使时间复杂度降为  $O(gN^3)$ ，并被多位研究者采纳<sup>[7,22]</sup>，成为计算 Tanner 图中短环的标准方法。该方法提出了一种称为“棒棒糖”（Lollipop）的结构进行递归计算，对于中短码长的码可快速进行运算。

在第 3 类方法中，文献[22]提出了一种针对准循环低密度校验码（QC-LDPC, quasi-cyclic low-density parity-check code）的最短环长计算方法，并在后续工作中<sup>[23-25]</sup>将可计算的环长推广至  $g+2, g+4, \dots, 2g-2$ 。该算法利用了 QC-LDPC 码的准循环结构，通过计算校验矩阵特征值的方法来计算环数。该方法的时间复杂度为  $O(N|E_b|^3)$ ，其中， $|E_b|$  为 QC-LDPC 码子矩阵的边数， $N$  为分块数。文献[26]针对列重为 3 的规则 QC-LDPC 码提出了一种简化的穷举法，可计算环长为  $g, g+2, g+4$  的短环的数目。

上述 3 类方法各有优劣，第 1 类方法的优势在于可以计算各种图（包括 Tanner 图）的短环，应用的范围最广，缺点是复杂度高，只适于计算节点数目较小的图的短环数目；第 2 类方法的优势在于能

计算所有的 Tanner 图中的短环且复杂度适中，适用于信道编码领域；第 3 类方法的优势在于利用了准循环码对应校验矩阵特性，可计算环长更长 ( $g > 4$ ) 的短环的数目，缺点是仅适用于一类 Tanner 图。本文提出一种基于 Tanner 图的矩阵递推环长计算方法，可计算环长为  $g, g+2, g+4$  的短环数目，并进一步将复杂度降低至  $O(DN^2)$ ，其中， $D$  为变量节点的平均度数，对于 LDPC 码， $D \ll N$ 。同时，该方法能提供每个节点参与的短环的数目，为分析构造 LDPC 码提供有力工具，属于第 2 类方法。该方法在计算过程中会产生多种结构，归纳了 5 种基本结构，在这些基本结构中逐边递推，通过减去非法结构得到所有结构的分布矩阵，最终得到各长度短环的数目。

## 2 基本定义

一个 Tanner 图  $G(V, C, E)$  由顶点集  $V, C$  及边集  $E$  组成，其中， $V$  为变量节点的集合， $C$  为校验节点的集合，满足  $V \cap C = \emptyset, Y = V \cup C$ 。 $V$  中任何 2 个节点不相连， $C$  中任何 2 个节点不相连，如图 1 所示。Tanner 图可由一个  $M \times N$  的矩阵  $H$  唯一表示，其中， $M$  表示校验节点的数目， $N$  表示变量节点的数目， $H$  中元素非 0 即 1。校验节点用  $H$  中的行来表示，变量节点用  $H$  中的列来表示。 $H$  中元素  $h_{i,j} = 1$  当且仅当  $v_j$  与  $c_i$  相连。如图 1 所示， $c_1, c_2, c_3 \in C, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \in V$ ，该 Tanner 图可以用式(1)中的校验矩阵来表示。一个长度为  $k$  的“游走”定义为一系列相连的点及边所组成的图，记作  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}$ ，其中， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k+1} \in Y$  且  $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\} \in E, i \in [1, k]$ 。一条长度为  $k$  的“路径”定义为如下所示的一个无重复点且无重复边的游走。一个环定义为一个“游走”： $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}$ ，满足  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k$  及  $\alpha_k \alpha_{k+1}$  均为路径，且  $\alpha_1 = \alpha_{k+1}$ 。

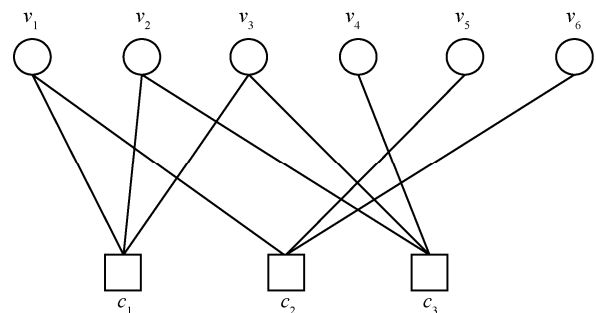


图 1 Tanner 图表示

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.1 基本运算

1)  $\circ$ : 阿达马乘积, 即 2 个同维矩阵相应位置元素的乘积, 具体计算为

$$C = A \circ B$$

其中,  $a_{ij}$  为  $A$  中第  $i$  行  $j$  列的元素,  $b_{ij}$  为  $B$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素,  $c_{ij}$  为  $C$  中的第  $i$  行  $j$  列元素,  $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ 。

2)  $\text{sum}(A,1)$ : 对  $A$  的每列求和得到行向量。

$\text{sum}(A,2)$ : 对  $A$  的每行求和得到列向量。

3)  $R'$ : 矩阵  $R$  的转置。

4)  $I$ : 单位阵。

5)  $\text{ones}(r,c)$ : 生成一个  $r$  行、 $c$  列的全为 1 的矩阵。

$$6) D_{\text{diag}}(A) = \begin{cases} A, & A \text{ 不是方阵} \\ A - A \circ I, & A \text{ 是方阵} \end{cases}$$

$$7) H(i) = \begin{cases} H, & i \text{ 为奇数} \\ H', & i \text{ 为偶数} \end{cases}$$

8)  $D = \max(A,B)$ , 满足  $d_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$ , 其中,  $d_{ij}$  为  $D$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素。

2.2 5 种基本结构

每种结构都用一个矩阵存储, 该矩阵称为结构数分布矩阵。矩阵中元素  $(i,j)$  表示以  $v_i$  (或  $c_i$ ) 为起点 (对应矩阵的行), 以  $v_j$  (或  $c_j$ ) 为终点 (对应矩阵的列) 的结构数目。为便于表示, 本文仅给出以变量节点  $v_i$  为起点的结构数分布矩阵, 以校验节点  $c_i$  为起点的结构数分布矩阵可同理得到, 只需将对应位置的  $v$  与  $c$  相互替换、 $N$  与  $M$  相互替换、 $H$  及其置换相互替换即可。

下面给出 5 种基本结构分布矩阵的定义。

1)  $P_v(l)$ : 一个矩阵, 如图 2 所示, 其中,  $v_i$  为起点,  $r_j$  为终点,  $l$  为路径长度,  $r_j = \begin{cases} v_j, & l \text{ 为偶数} \\ c_j, & l \text{ 为奇数} \end{cases}$ 。

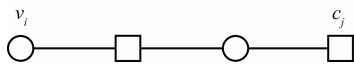


图 2  $P_v(l)$  ( $l=3$ ) 示意

2)  $C_v(l,q)$ : 一个矩阵, 如图 3 所示, 其中,  $v_i$  按顺时针方向到  $c_j$  (或  $v_j$ ) 的路径长度为  $l$ ,  $v_i$  按

逆时针方向到  $c_j$  (或  $v_j$ ) 的路径长度为  $q$ 。

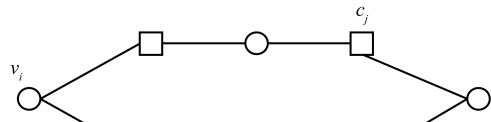


图 3  $C_v(l,q)$  ( $l=3, q=5$ ) 示意

3)  $L_v(l,q)$ : 一个矩阵, 如图 4 所示, 其中,  $q$  表示子环的长度,  $l$  表示  $v_i$  到子环的距离。

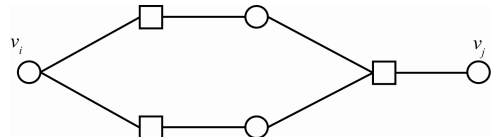


图 4  $L_v(l,q)$  ( $l=1, q=6$ ) 示意

4)  $T_v(l,q)$ : 一个矩阵, 如图 5 所示,  $q$  表示子环长度,  $l$  表示  $v_i$  到子环的距离。

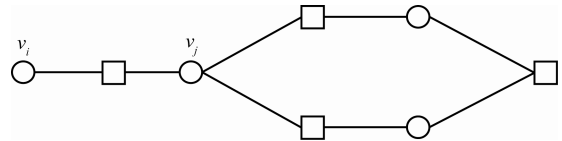


图 5  $T_v(l,q)$  ( $l=2, q=6$ ) 示意

5)  $W_v(l)$ : 一个矩阵, 如图 6 所示,  $l$  表示  $v_i$  到  $c_j$  (或  $v_j$ ) 的距离。

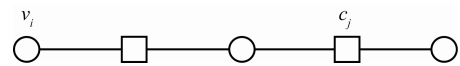


图 6  $W_v(l)$  ( $l=3$ ) 示意

同理可得  $P_c(l)$ 、 $C_c(l,q)$ 、 $L_c(l,q)$ 、 $T_c(l,q)$  和  $W_c(l)$ , 分别对应以校验节点为起点的结构数分布矩阵。

3 短环分布递推算法

在进行结构间递推的过程中, 需要利用已有结构的结构数分布矩阵  $A$  推出新结构的结构数分布矩阵  $B$ , 这里已有结构表示为  $(Y_A, E_A)$ ,  $Y_A$  表示该结构的节点集合,  $E_A$  是该结构的边集合; 新的结构用  $(Y_B, E_B)$  来表示,  $Y_B$  表示该结构的节点集合,  $E_B$  是该结构的边集合。本节采用逐边递推的方式, 该方式对应以下 2 种矩阵运算。

1) 普通乘法:  $A$  与校验矩阵  $H$  (或  $H'$ ) 的乘积  $C$ ,  $C$  对应在已有结构的基础上延伸出一条边 ( $e_c$ ) 到达一个节点 ( $y_c$ ) 的结构。符合要求的合理新结构 ( $Y_B, E_B$ ) 需满足  $e_c \in E_B$ 、 $e_c \notin E_A$  且  $y_c \in Y_B$ 、 $y_c \notin Y_A$ , 即延伸出的边及节点与原有结构不重合。不满足此条件的结构称为非法结构, 应该从  $C$  中剔除。

2)  $\circ$ : 2 个同维矩阵  $X$ 、 $Z$  的元素级乘法, 得到的新矩阵对应的结构表示同时具备原有 2 个结构 ( $X$  和  $Z$ ) 的特征。

初始化:

$$P_{-v}(1) = H'$$

$$P_{-c}(1) = H$$

$$P_{-v}(2) = D_{\text{diag}}(H'H)$$

$$P_{-c}(2) = D_{\text{diag}}(HH')$$

$D_c = \text{sum}(H, 2)$ : 表示校验节点的度数分布

$D_v = (\text{sum}(H, 1))'$ : 表示变量节点的度数分布

首先, 通过计算  $P_{-v}(l)$  计算  $g$ 。伪代码如下。

while( $P_{-v}(l)$  不存在大于 1 的元素) do

$$P_{-v}(i+1) = \begin{cases} D_{\text{diag}}(P_{-v}(i)H), & i \text{ 为奇数} \\ P_{-v}(i)H', & i \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$i = i + 1$$

end while

由此得到  $\frac{g}{2} = i$ , 至此,  $P_{-v}(1), P_{-v}(2), \dots,$

$P_{-v}\left(\frac{g}{2}\right)$  均计算完毕, 同理可计算  $P_{-c}(1), P_{-c}(2), \dots,$

$P_{-c}\left(\frac{g}{2}\right)$ 。对于一个固定的节点对  $(v_i, r_j)$ ,  $v_i$  到  $r_j$  的

长度为  $\frac{g}{2}$  的路径数决定了经过该节点对环长为  $g$  的环数。由此可得

$$C_{-v}\left(\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right) = P_{-v}\left(\frac{g}{2}\right) \circ \frac{\left(P_{-v}\left(\frac{g}{2}\right) - I\right)}{2} \quad (2)$$

$$N_{-g-v}\left(\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right) = \frac{\text{sum}\left(\text{sum}\left(C_{-v}\left(\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right), 1\right), 2\right)}{\frac{g}{2}} \quad (3)$$

其中,  $N_{-a+b-v}(a, b)$  表示以变量节点为起点, 环长为  $a+b$  的环数。

下面给出  $W_{-v}(l)$ ,  $1 \leq l \leq g-2$ , 此时不存在非法结构, 故有

$$W_{-v}(l) = \begin{cases} P_{-v}(l) \circ \left(\text{ones}(N, 1)(D'_c - I)\right), & l \text{ 为奇数} \\ D_{\text{diag}}\left(P_{-v}(l) \circ \left(\text{ones}(N, 1)(D'_v - I)\right)\right), & l \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (4)$$

当  $l = g-1$  时, 有

$$W_{-v}(g-1) = P_{-v}(g-1) \circ \left(\text{ones}(N, 1)(D'_c - I) - H'\right) \quad (5)$$

对于  $l = g(g=6)$ , 存在如图 7 所示的非法结构。

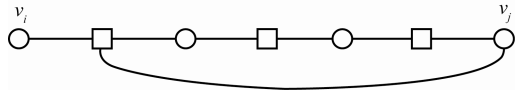


图 7  $W_{-v}(l)$  非法结构

$$W_{-v}(g) = D_{\text{diag}}\left(P_{-v}(g) \circ \left(\text{ones}(N, 1)(D'_v - I) - (H'C_{-c}(1, g-1) - C_{-v}(2, g-2))\right)\right) \quad (6)$$

下面给出  $P_{-v}\left(\frac{g}{2} + i\right)$  的计算, 其中,  $1 \leq i \leq \frac{g}{2}$ ,

非法结构为  $W_{-v}\left(\frac{g}{2} + i - 2\right)$ 。

减去非法结构的数目, 得

$$P_{-v}\left(\frac{g}{2} + i\right) = \begin{cases} D_{\text{diag}}\left(P_{-v}\left(\frac{g}{2} + i - 1\right)H - W_{-v}\left(\frac{g}{2} + i - 2\right)\right), & \text{若 } \frac{g}{2} + i - 1 \text{ 为奇数} \\ P_{-v}\left(\frac{g}{2} + i - 1\right)H' - W_{-v}\left(\frac{g}{2} + i - 2\right), & \text{若 } \frac{g}{2} + i - 1 \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (7)$$

下面计算  $C_{-v}\left(\frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + i\right)$ , 其中,  $1 \leq i \leq \frac{g}{2} - 1$ ,

此时无非法结构, 故有

$$C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + i \right) = D_{-diag} \left( P_{-v} \left( \frac{g}{2} - i \right) \circ P_{-v} \left( \frac{g}{2} + i \right) \right) \quad (8)$$

$$N_{-g-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + i \right) = \frac{\text{sum} \left( \text{sum} \left( C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + i \right), 1 \right), 2 \right)}{g} \quad (9)$$

下面计算  $L_{-v}(1, g)$ , 非法结构为  $C_{-v} \left( \frac{g}{2} - 1, \frac{g}{2} + 1 \right)$ 。

$$L_{-v}(1, g) = D_{-diag} \left( C_{-v} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} \right) H \left( \frac{g}{2} \right) - C_{-v} \left( \frac{g}{2} - 1, \frac{g}{2} + 1 \right) \right) \quad (10)$$

下面计算  $C_{-v} \left( \frac{g}{2} + 1, \frac{g}{2} + 1 \right)$ , 此时存在 2 种非法结构:  $L_{-v}(1, g)$  及其转置。

$$C_{-v} \left( \frac{g}{2} + 1, \frac{g}{2} + 1 \right) = \frac{P_{-v} \left( \frac{g}{2} + 1 \right) \circ \left( P_{-v} \left( \frac{g}{2} + 1 \right) - I \right)}{2} - L_{-v}(1, g) - L_{-v}(1, g)' \quad (11)$$

$$N_{-g+2-v} \left( \frac{g}{2} + 1, \frac{g}{2} + 1 \right) = \frac{\text{sum} \left( \text{sum} \left( C_{-v} \left( \frac{g}{2} + 1, \frac{g}{2} + 1 \right), 1 \right), 2 \right)}{\frac{g}{2}} \quad (12)$$

下面计算  $T_{-v}(1, g)$  及  $T_{-v}(1, g + 2)$ , 此时非法结构对应的矩阵分别为  $C_{-v}(1, g - 1)$  与  $C_{-v}(1, g + 1)$ , 故有

$$T_{-v}(1, g) = P_{-v}(1) \circ \left( \text{ones}(N, 1) \text{sum} \left( C_{-c} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} \right), 2 \right) \right)' - C_{-v}(1, g - 1) \quad (13)$$

$$T_{-v}(1, g + 2) = H' \circ \left( \text{ones}(N, 1) \text{sum} \left( C_{-c} \left( \frac{g}{2} + 1, \frac{g}{2} + 1 \right), 2 \right) \right)' - C_{-v}(1, g + 1) \quad (14)$$

下面计算  $W_{-v}(g + 1)$ , 此时的非法结构如图 8 所示。

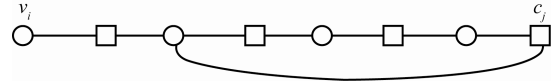
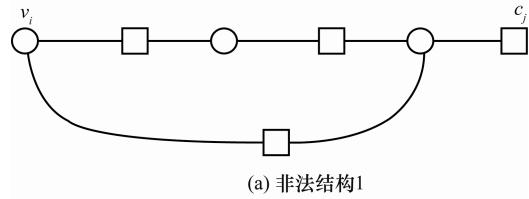


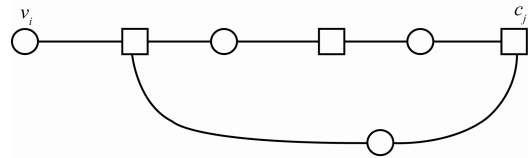
图 8 计算  $W_{-v}(g + 1)$  时的非法结构

$$W_{-v}(g + 1) = P_{-v}(g + 1) \circ \left( \text{ones}(N, 1) \left( D'_c - I \right) - H' \right) - \left( H' \left( H' C_{-v}(1, g - 1) - C_{-v}(2, g - 2) \right) - C_{-v}(1, g - 1) \right) \circ \left( \max \left( \left( D_v - 2 \right), \theta \right) \text{ones}(1, M) \right) \right) \circ \left( \text{ones}(N, 1) \max \left( \left( D'_c - 2 \right), \theta \right) - H' \right) \quad (15)$$

下面计算  $C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + 2 + i \right)$ ,  $0 \leq i \leq \frac{g}{2} - 2$ , 存在如图 9 所示的 2 种非法结构。



(a) 非法结构 1



(b) 非法结构 2

图 9 计算  $C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + 2 + i \right)$ ,  $0 \leq i \leq \frac{g}{2} - 2$  时的非法结构

为便于计算, 现引入中间变量  $J_{-v}$ , 有

$$J_{-v} = P_{-v} \left( \frac{g}{2} + 2 \right) \circ P_{-v} \left( \frac{g}{2} \right) - \left( C_{-v} \left( \frac{g}{2} - 1, \frac{g}{2} + 1 \right) H \left( \frac{g}{2} - 1 \right) - 2C_{-v} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} \right) - C_{-v} \left( \frac{g}{2} - 2, \frac{g}{2} + 2 \right) \right) - \left( C_{-c} \left( \frac{g}{2} - 1, \frac{g}{2} + 1 \right) H' \left( \frac{g}{2} + 1 \right) - 2C_{-c} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} \right) - C_{-c} \left( \frac{g}{2} - 2, \frac{g}{2} + 2 \right) \right) \quad (16)$$

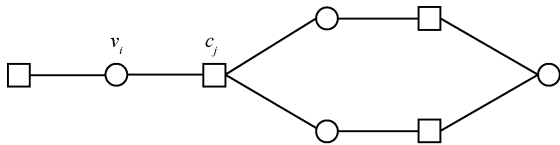
$$C_{-v} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} + 2 \right) = D_{-diag} \left( J_{-v} \right) \quad (17)$$

对于  $1 \leq i \leq \frac{g}{2} - 2$ , 有

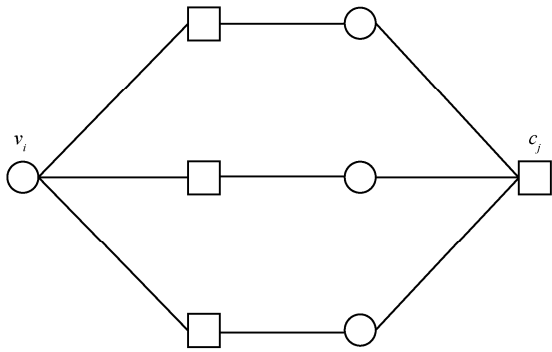
$$C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + 2 + i \right) = \begin{cases} \left[ \begin{aligned} &D_{\text{diag}} \left( P_{-v} \left( \frac{g}{2} + 2 + i \right) \circ P_{-v} \left( \frac{g}{2} - i \right) - \left( C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i - 1, \frac{g}{2} + 1 + i \right) H \left( \frac{g}{2} - i - 1 \right) - \right. \right. \\ &C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i - 2, \frac{g}{2} + 2 + i \right) - C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + 2 + i \right) \left. \left. - \left( C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i - 1, \frac{g}{2} + 1 + i \right) H \left( \frac{g}{2} - i - 1 \right) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i - 2, \frac{g}{2} + 2 + i \right) - C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + 2 + i \right) \right) \right)', \text{若 } \frac{g}{2} - i \text{ 为偶数} \end{aligned} \right. \\ \left[ \begin{aligned} &D_{\text{diag}} \left( P_{-v} \left( \frac{g}{2} + 2 + i \right) \circ P_{-v} \left( \frac{g}{2} - i \right) - \left( C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i - 1, \frac{g}{2} + 1 + i \right) H \left( \frac{g}{2} - i - 1 \right) - \right. \right. \\ &C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i - 2, \frac{g}{2} + 2 + i \right) - C_{-v} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + 2 + i \right) \left. \left. - \left( C_{-c} \left( \frac{g}{2} - i - 1, \frac{g}{2} + 1 + i \right) H \left( \frac{g}{2} - i \right) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \left( C_{-c} \left( \frac{g}{2} - i - 2, \frac{g}{2} + 2 + i \right) - C_{-c} \left( \frac{g}{2} - i, \frac{g}{2} + 2 + i \right) \right) \right) \right)', \text{若 } \frac{g}{2} - i \text{ 为奇数} \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (18)$$

$$T_{-v}(2, g) = D_{\text{diag}}(H'T_{-c}(1, g)) \quad (19)$$

下面计算  $T_{-v}(3, g)$ , 此时的非法结构如图 10 所示。



(a) 非法结构1



(b) 非法结构2

图 10 计算  $T_{-v}(3, g)$  时的非法结构

$$\begin{aligned} T_{-v}(3, g) &= H'T_{-c}(2, g) - T_{-v}(1, g) \circ \\ &((D_v - I) \text{ones}(1, M)) - P_{-v} \left( \frac{g}{2} \right) \circ \\ &\max \left( P_{-v} \left( \frac{g}{2} \right) - I, \theta \right) \circ \max \frac{\left( P_{-v} \left( \frac{g}{2} \right) - 2, \theta \right)}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

下面计算  $L_{-v}(2, g)$ , 此时的非法结构如图 11 所示。

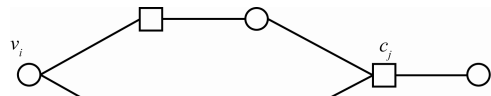


图 11 计算  $L_{-v}(2, g)$  时的非法结构

$$\begin{aligned} L_{-v}(2, g) &= \begin{cases} L_{-v}(1, g) H \left( \frac{g}{2} + 1 \right) - C_{-v} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} \right) \circ \\ \left( \text{ones}(N, 1) \max(D'_c - 2, \theta) \right), \text{若 } \frac{g}{2} \text{ 为奇数} \end{cases} \\ &= \begin{cases} D_{\text{diag}} \left( L_{-v}(1, g) H \left( \frac{g}{2} + 1 \right) - \right. \\ \left. C_{-v} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} \right) \circ \left( \text{ones}(N, 1) \max(D'_v - 2, \theta) \right) \right), \text{若 } \frac{g}{2} \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

下面计算  $L_{-v}(1, g + 2)$ , 此时非法结构对应的矩阵为  $C_{-v} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} + 2 \right)$ , 故有

$$L_{-v}(1, g + 2) = C_{-v} \left( \frac{g}{2} + 1, \frac{g}{2} + 1 \right) H \left( \frac{g}{2} + 1 \right) - C_{-v} \left( \frac{g}{2}, \frac{g}{2} + 2 \right) \quad (22)$$

下面计算  $P_{-v}(g + 1)$ , 此时非法结构对应的矩阵分别为  $W_{-v}(g - 1)$  与  $T_{-v}(1, g)$ , 故有

$$P_{-v}(g + 1) = P_{-v}(g) H' - W_{-v}(g - 1) - 2T_{-v}(1, g) \quad (23)$$

下面计算  $P_{-v}(g+2)$ ，此时非法结构对应的矩阵分别为  $W_{-v}(g)$  与  $T_{-v}(2,g)$ ，故有

$$P_{-v}(g+2) = D_{\text{diag}}(P_{-v}(g+1)H - W_{-v}(g) - 2T_{-v}(2,g)) \quad (24)$$

下面计算  $P_{-v}(g+3)$ ，此时非法结构对应的矩阵分别为  $W_{-v}(g+1)$ 、 $T_{-v}(3,g)$  与  $T_{-v}(1,g+2)$ ，故有

$$P_{-v}(g+3) = P_{-v}(g+2)H' - W_{-v}(g+1) - 2T_{-v}(3,g) - 2T_{-v}(1,g+2) \quad (25)$$

下面计算  $C_{-v}\left(\frac{g}{2}+2, \frac{g}{2}+2\right)$ ，此时存在包括

$$C_{-v}\left(\frac{g}{2}+2, \frac{g}{2}+2\right) = \begin{cases} \frac{P_{-v}\left(\frac{g}{2}+2\right) \circ \left(P_{-v}\left(\frac{g}{2}+2\right) - I\right)}{2} - L_{-v}(2,g) - L_{-v}(1,g+2) - F_1 - L_{-c}(2,g)' - L_{-c}(1,g+2)', & \text{若 } \frac{g}{2} \text{ 为奇数} \\ \frac{P_{-v}\left(\frac{g}{2}+2\right) \circ \left(P_{-v}\left(\frac{g}{2}+2\right) - I\right)}{2} - L_{-v}(2,g) - L_{-v}(1,g+2) - F_2 - L_{-v}(2,g)' - L_{-v}(1,g+2)', & \text{若 } \frac{g}{2} \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (26)$$

其中，

$$F_1 = L_{-v}(1,g)'H' - \left( H'C_{-c}\left(\frac{g}{2}-1, \frac{g}{2}+1\right)' - C_{-c}\left(\frac{g}{2}-2, \frac{g}{2}+2\right)' - 2C_{-c}\left(\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right)' \right) \quad (27)$$

$$F_2 = L_{-v}(1,g)'H' - \left( H'C_{-v}\left(\frac{g}{2}-1, \frac{g}{2}+1\right)' - C_{-v}\left(\frac{g}{2}-2, \frac{g}{2}+2\right)' - 2C_{-v}\left(\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right)' \right) \quad (28)$$

$$C_{-v}(1,g+1) = P_{-v}(g+1) \circ H' \quad (29)$$

$$N_{-g+2,-v}(1,g+1) = \frac{\text{sum}(\text{sum}(C_{-v}(1,g+1), 1), 2)}{g+2} \quad (30)$$

$$C_{-v}(1,g+3) = P_{-v}(g+3) \circ H' \quad (31)$$

$$N_{-g+4,-v}(1,g+3) = \frac{\text{sum}(\text{sum}(C_{-v}(1,g+3), 1), 2)}{g+4} \quad (32)$$

下面计算  $C_{-v}(2,g+2)$ ，此时存在如图 13 所示的 2 种非法结构。

图 12 所示结构在内的 5 种非法结构，其他 4 种为  $L_{-v}(2,g)$ 、 $L_{-v}(1,g+2)$ 、 $L_{-c}(2,g)$ 、 $L_{-c}(1,g+2)$ 。

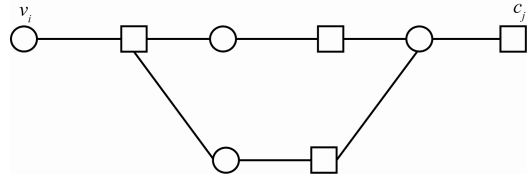


图 12 计算  $C_{-v}\left(\frac{g}{2}+2, \frac{g}{2}+2\right)$  时的非法结构

最终表达式为

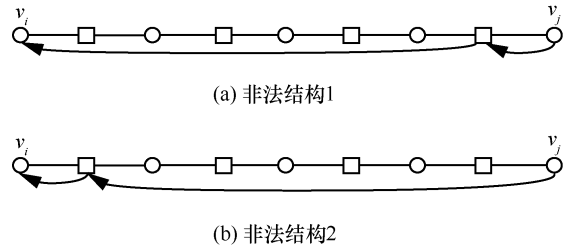


图 13 计算  $C_{-v}(2,g+2)$  时的非法结构

$$C_{-v}(2,g+2) = D_{\text{diag}}(P_{-v}(g+2) \circ P_{-v}(2) - (C_{-v}(1,g+1)H - C_{-v}(2,g)) - (C_{-v}(1,g+1)H - C_{-v}(2,g))') \quad (33)$$

$$N_{-g+4,-v}(2,g+2) = \frac{\text{sum}(\text{sum}(C_{-v}(2,g+2), 1), 2)}{g+4} \quad (34)$$

## 4 复杂度分析及算例计算

### 4.1 复杂度分析

#### 4.1.1 时间复杂度

时间复杂度来自于矩阵的运算，本文算法涉及 2 种主要矩阵运算。

1) 普通矩阵乘法：是一个矩阵与一个稀疏校验矩阵 ( $H$  或其转置) 的乘法。稀疏校验矩阵中的元素非 0 即 1，所以在实际计算中只表现为取某些行

(或列) 求和的计算, 故普通矩阵乘法的时间复杂度为  $O(DN^2)$ , 其中,  $D$  为变量节点的平均度数, 且  $D \ll N$ 。

2)  $\circ$ : 该运算为矩阵元素级的整数乘法运算, 复杂度为  $O(N^2)$ 。

故本文算法的时间复杂度为  $O(N^2)$ , 而文献[21]的方法只提供了 Lollipop 与路径这 2 种结构, 结构间无法实现逐边递推, 其中的普通矩阵乘法包含了 2 个非稀疏矩阵的乘积, 故复杂度为  $O(gN^3)$  [21]。

#### 4.1.2 空间复杂度

空间复杂度来自于矩阵的存储, 本文所用到矩阵变量的数目为一固定值, 故空间复杂度为  $O(N^2)$ 。在算法实际运行过程中, 若环长计算只采用本文提供的一种计算方法, 运算过程中及时释放中间变量, 则消耗的最大内存为  $12NM + 3N^2 + 4M^2$ , 而文献[21]的方法消耗的最大内存为  $21NM + 11N^2 + 11M^2$  [21]。通过对比可以看出, 本文方法比文献[21]的方法节约了至少一半的运行空间。

#### 4.2 计算示例

本节对由 Gallager 方法、有限几何、准循环 [28]、PEG 算法构造的不同类型的 LDPC 进行计算。其中, Gallager 方法构造的码字为规则码, 校验节点及变量节点度数分别为 6 和 3; PG813\_1057 码、PG191\_273 码、EG1023 码的校验节点度数均等于各自的变量节点度数, 分别为 33、17、32; PEGir252\_504 码的变量节点度数最高为 11; 2256\_4512 码为 IEEE 802.16e 中所采用的码。同时, 为了便于表示, 给出了一个 (14,8) 扩展汉明码作为示例。

(14,8) 扩展汉明码的校验矩阵为

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

运行本文算法, 得到最短环长  $g=6$ 。对于  $g=6$  的环, 给出了 3 种计算方法, 分别计算得到 3 种结构分布矩阵。

$$C_{-v}(1,5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$C_{-v}(3,3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$C_{-v}(2,4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

计算可得，环长为 6 的环的数目为

$$N_{6-v}(1,5) = \frac{\text{sum}(\text{sum}(C_v(1,5),1),2)}{6} = 7 \quad (39)$$

$$N_{6-v}(2,4) = \frac{\text{sum}(\text{sum}(C_v(2,4),1),2)}{6} = 7 \quad (40)$$

$$N_{6-v}(3,3) = \frac{\text{sum}(\text{sum}(C_v(3,3),1),2)}{3} = 7 \quad (41)$$

进一步计算可得环长为 8 及环长为 10 的环的数目分别为 14、28，且多种方法的计算结果一致，互为验证。

表 1 给出了上述几种 LDPC 码的短环数量和计算时间，对应的最短环长  $g$  为 4 或 6。通过对比可以看到，本文算法和 Lollipop 递推算法对各环长的环数计算结果一致。运行的硬件平台为 Intel i3 处理器，6 GB 内存，软件平台为 Matlab。这 2 种算法的运行时间与码长及变量节点度数呈正相关关系，与短环的数量无关。Lollipop 递推算法的运行时间近似于码长的 3 次方增长，本文算法的运行时间与码长平方及变量节点度数的乘积呈近似线性增长关系。当码长很长(>10 000)，变量节点度数分布基本固定的情况下，本文算法呈现出更大的优势。

## 5 结束语

本文提出了一种低复杂度的基于矩阵运算的

短环计数算法，该算法定义了 5 种基本图结构，并在这些结构间进行递推，最终算出环长为  $g$ 、 $g+2$ 、 $g+4$  的所有短环的数目。与之前算法不同的是，本文算法可提供更精细的环结构信息，不仅能给出每个节点参与的环数，还能给出每个节点的每条边参与的环数。对于给定环长，该算法运用多种方式进行计算，得到了相同的环数计算结果，进一步验证了算法的正确性。由于本文中的矩阵乘法均是稀疏的校验矩阵的运算，可简化为矩阵向量的求和，故该算法的时间复杂度从  $O(N^3)$  降低至  $O(DN^2)$ 。算例显示，对于常用的码长小于 10 000 的 LDPC 码，计算全部环数的时间不超过 10 s。在后续工作中，可进一步考虑计算环长大于  $g+4$  的环数，同时，也可以考虑如何把该方法用于计算陷阱集<sup>[29,30]</sup>的分布以及如何改进 BP 算法译码性能。

## 参考文献:

- [1] HUANG Q, DIAO Q J, LIN S, et al. Cyclic and quasi-cyclic LDPC codes on constrained parity-check matrices and their trapping sets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(5): 2648-2671.
- [2] OVINNIKOV A A, VITYAZEV V V, et al. Fast estimation of error floor effect for irregular low-density parity-check codes[C]//2015 International Siberian Conference on Control and Communications. 2015:1-4.
- [3] 赵明, 张晓林. 基于改进 2-D+GRS 码的 QC-LDPC 码高效构造[J]. 通信学报, 2015, 36(2):193-199.  
ZHAO M, ZHANG X L. Novel construction of QC-LDPC codes with

表 1 几种 LDPC 码的短环数量及运行时间

码型	环数				运行时间/s	
	环长为 4	环长为 6	环长为 8	环长为 10	Lollipop	本文方法
GA128_256	0	164	1 000	7 217	0.17	0.019
GA256_512	0	153	1 104	8 627	0.51	0.070
GA512_1024	0	168	1 151	8 877	2.60	0.250
GA1000_2000	0	182	1 175	9 774	160.00	0.750
GA2000_4000	0	171	1 263	9 934	120.00	2.600
GA4000_8000	0	143	1 190	10 042	1 038.00	9.000
PG813_1057	0	190 496 768	137 300 545 536	11 258 644 733 952	8.10	1.200
PG191_273	0	3 168 256	534 643 200	109 922 641 920	0.50	0.060
EG1023	0	157 465 616	106 517 624 400	81 959 438 474 496	10.00	1.300
QC288_576	48	504	6 756	—	0.87	0.090
PEGir252_504	0	13 244	420 609	13 567 791	0.70	0.080
2256_4512	0	752	5 640	81 968	155.00	4.200

- modified 2-D GRS codes[J]. Journal on Communications, 2015, 36(2): 193-199.
- [4] ASLAM C A, GUAN Y L, CAI K. Improving the belief-propagation convergence of irregular LDPC codes using column-weight based scheduling[J]. IEEE Communications Letters, 2015, 19(8): 1283-1286.
- [5] 马克祥, 孙吉成, 王萌, 等. 用于 LDPC 码快速译码的改进多比特翻转算法[J]. 通信学报, 2014, 35(2):118-124.  
MA K X, SUN J C, WANG M, et al. Improved multi-bits flipping algorithm for high-speed LDPC decoding[J]. Journal on Communications, 2014, 35(2):118-124.
- [6] RAVEENDRAN N, SRINIVASA S G. An analysis into the loopy belief propagation algorithm over short cycles[C]//2014 IEEE International Conference on Communications. 2014:2009-2014.
- [7] JIAO X P, MU J J. Probabilistic analysis of cycles in random Tanner graphs[C]//2013 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing. 2013:1-5.
- [8] MORITZ B, PETER V. Breaking cycles with dummy bits: improved rate-compatible LDPC codes with short block lengths[C]//The 9th International ITG Conference on Systems, Communication and Coding. 2013:1-6.
- [9] CHAO F G, REN H, CAO N. Finding a shortest cycle in a subspace of the cycle space of a graph[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 268: 393-398.
- [10] NITHIN R, GARANI S S. A modified sum-product algorithm over graphs with isolated short cycles[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. 2014:2619-2623.
- [11] FOUCAUD F, KRIVELEVICH M, PERARNAU G. Large subgraphs without short cycles[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2015, 29(1): 65-78.
- [12] CHEN R, HUANG H, XIAO G. Relation between parity-check matrices and cycles of associated Tanner graphs[J]. IEEE Communication Letters, 2007, 11(8):674-676.
- [13] CHANG Y C, FU H L. The number of 6-cycles in a graph[J]. Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 2003, 39: 27-30.
- [14] FLUM J, GROHE M. The parameterized complexity of counting problems[J]. SIAM Journal on Computing, 2004, 33(4): 892-922.
- [15] JOHNSON D B. Find all the elementary circuits of a directed graph[J]. Journal SIAM, 1975, 4: 77-84.
- [16] BAX E T. Algorithms to count paths and cycles[J]. Information Processing Letters, 1994, 52(5): 249-252.
- [17] SCHOTT R, STAPLES G S. On the complexity of cycle enumeration using Zeons[C]//Applied Geometric Algebras in Computer Science and Engineering. 2010: 1-22.
- [18] STAPLES G S. A new adjacency matrix for finite graphs[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2008, 18(3):979-991.
- [19] STORM C. Some properties of graphs determined by edge zeta functions[J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 434(5):1285-1294.
- [20] FAN J, XIAO J. A method of counting the number of cycles in LDPC codes[C]//The 8th International Conference on Signal Processing. 2006:2183-2186.
- [21] HALFORD T R, CHUGG K M. An algorithm for counting short cycles in bipartite graphs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1):287-292.
- [22] KADI A, NAJAH S, MRABTI M, et al. Improving performance of the min sum algorithm for LDPC codes[C]//The Mediterranean Conference on Information & Communication Technologies. 2015: 381-388.
- [23] KARIMI M, BANIASHEMI A H. On the girth of quasi cyclic protograph LDPC codes[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. 2012:3078-3082.
- [24] KARIMI M, BANIASHEMI A H. Efficient algorithm for finding dominant trapping sets of LDPC codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(5):6942-6958.
- [25] KARIMI M, BANIASHEMI A H. Counting short cycles of quasi cyclic protograph LDPC codes[J]. IEEE Communication Letters, 2012, 16(3):400-403.
- [26] KARIMI M, BANIASHEMI A H. On the girth of quasi cyclic protograph LDPC codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(7): 4542-4552.
- [27] SUN C, XU H, FENG D, et al. (3, L) quasi-cyclic LDPC codes\_ Simplified exhaustive search and designs[C]//The 9th International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing. 2016: 271-275.
- [28] HOSUNG P, SEOKBEOM H, SEON N J. Design of multiple-edge protographs for QC LDPC codes avoiding short inevitable cycles[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(7): 4598-4614.
- [29] HASHEMI Y, BANIASHEMI A H. On characterization and efficient exhaustive search of elementary trapping sets of variable-regular LDPC codes[J]. IEEE Communication Letters, 2015, 19(3): 323-326.
- [30] KARIMI M, BANIASHEMI A H. On characterization of elementary trapping sets of variable-regular LDPC codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(9): 5188-5203.

#### 作者简介:



朱庆 (1981-), 男, 江苏扬州人, 博士, 国电南瑞科技股份有限公司用电技术分公司工程师, 主要研究方向为信道编码、可见光通信、电力通信、智能电网。



吴乐南 (1952-), 男, 安徽枞阳人, 东南大学教授、博士生导师, 主要研究方向为调制技术、多媒体信号处理、数据压缩。

杨永标 (1978-), 男, 江苏南通人, 国电南瑞科技股份有限公司用电技术分公司副总工, 主要研究方向为电力系统自动化、智能电网。

李捷 (1973-), 男, 江苏南京人, 国电南瑞科技股份有限公司用电技术分公司工程师, 主要研究方向为电力通信、智能电网。

徐石明 (1967-), 男, 江苏张家港人, 国电南瑞科技股份有限公司用电技术分公司高级工程师, 主要研究方向为电力通信、电力系统自动化、智能电网。